

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазинова Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

5-дәріс. Аспан денелерінің эфемеридаларын анықтау

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға ұйытқысыз қозғалыстың эфемеридаларын анықтау әдістерін меңгерту; эллипстік қозғалыстың қатарларын (дәрежелік және тригонометриялық) қолдану арқылы аспан денелерінің орбиталық қозғалысын сипаттауды үйрету.

Жоспар

1. Ұйытқысыз қозғалыстың эфемеридаларын анықтау
2. Эллипстік қозғалысының қатарлары
3. Кеплер теңдеуінің шешімі
4. Эллипстік қозғалыстың дәрежелік қатарлары
5. Эллипстік қозғалыстың тригонометриялық қатарлары

1. Ұйытқысыз қозғалыстың эфемеридаларын анықтау

Эфемерида дегеніміз - аспан денесінің уақыт бойынша геоцентрлік орналасуы координаттарының жиынтығы.

Аспан сферасында қозғалыстағы денелердің орналасуын аспан экваториалдық координаттары арқылы сипаттауға болады: тік шарықтауымен (α) , еңкеюмен (δ) . Кеністікте дененің орналасуын анықтау үшін тағы ρ - геоцентрлік арақашықтық қажет.

Екі дене есебінің жалпы шешімі аспан шырақтарының (планеталар, астероидтар және кометалар) ұйытқысыз эфемеридаларын анықтауға мүмкіндік береді.

Мысалы: $p, e, i, \Omega, \omega, \tau$ белгілі кеплер элементерімен ұйытқысыз орбита бойымен Күн айналасында дене қозғалады. Егер $t_1, t_2 \dots t_k$ уақыт мезетінде Күннің X, Y, Z - тікбұрышты геоцентрлік экваториалды координаттары берілсе осы уақыт мезетіндегі дененің ρ, α, δ сфералық геоцентрлік экваториалды координаттарын анықтау керек. Осы есептің ерекшелігі, бұрыштың кеплер элементтері эклиптикалық координат жүйесіне жатады, ал бізге дененің экваториалдық координаттарын анықтау қажет.

Есептің шешімін табу үшін TM_0M үшбұрышты қарастырамыз (T - Жер, M_0 - Күн, M - аспан денесі орналасу нүктелері).

Сонда

$$\vec{\rho} = \{\rho \cos \delta \cos \alpha, \rho \cos \delta \sin \alpha, \rho \sin \delta\} \quad (1)$$

- M дененің геоцентрлік радиус-векторы;

$$\vec{r}_{\text{эКВ}} = \{x_{\text{эКВ}}, y_{\text{эКВ}}, z_{\text{эКВ}}\}$$

- гелиоцентрлік экваториалдық координат жүйесіндегі M дененің радиус-векторы;

$$\vec{R} = \{X, Y, Z\}$$

- геоцентрлік экваториалды координат жүйесіндегі Күннің радиус-векторы.
Үш вектордың байланысы:

$$\vec{\rho} = \vec{r}_{\text{экв}} + \vec{R}. \quad (2)$$

$\vec{r}_{\text{экв}}$ векторды $\vec{r}$ радиус-вектор арқылы анықтауға болады

$$\begin{vmatrix} x_{\text{экв}} \\ y_{\text{экв}} \\ z_{\text{экв}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \quad (3)$$

ε - экватормен эклиптика жазықтары арасындағы екіжақты бұрыш.
Сонда

$$\begin{vmatrix} x_{\text{экв}} \\ y_{\text{экв}} \\ z_{\text{экв}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}, \quad (4)$$

осында

$$\begin{vmatrix} A_{\tau} & A'_{\tau} \\ B_{\tau} & B'_{\tau} \\ C_{\tau} & C'_{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{\tau} & \alpha'_{\tau} \\ \beta_{\tau} & \beta'_{\tau} \\ \gamma_{\tau} & \gamma'_{\tau} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Бағыттау косинустары $\alpha_{\tau}, \beta_{\tau}, \dots, \gamma'_{\tau}$ және орбиталдық координаттар ξ, η эллипстік қозғалыс теңдеулері арқылы есептелінеді.

Тік шарықтау, еңкею және геоцентрлік арақашықтық төменгі теңдеулер жүйесі арқылы анықталады:

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x_{\text{экв}} + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y_{\text{экв}} + Y, \\ \rho \sin \delta &= z_{\text{экв}} + Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Еңкею $-90^{\circ} \leq \delta \leq 90^{\circ}$, тік шарықтау $[0, 24^h]$ диапазондарында анықталады.

Осындай теңдеулер арқылы Күн жүйесіндегі кіші денелердің эфемеридалары анықталып, арнайы астрономиялық жылнамаларға енгізіледі.

2. Эллипстік қозғалысының қатарлары

Ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің жалпы шешімін белгілі бір формадағы теңдеу ретінде қарастыруға мүмкін емес (тек қана шеңберлік және параболалық түріндегі түсусызықты қозғалыс кезінде жазуға болады).

Себебі, эксцентрлік аномалия уақытқа тәуелділігі Кеплер теңдеуімен

$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (7)$$

ξ, η - орбиталдық координаттар және r - полярлық радиус

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ r &= a(1 - e \cos E) \end{aligned} \quad (8)$$

теңдеулерімен анықталады.

Бірақ ұйытқысыз қозғалыстың аналитикалық теориясын құрастыру үшін X, Y, Z координаттары мен $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ жылдамдықтарының уақытқа тәуелділіктері айқын болу керек. Осындай тәуелділіктерді тек қана шексіз қатарлар формасында жазу мүмкін.

Эллипстік қозғалыстың сандық сипаттамаларын қатарларға жіктейді. Ең бірінші сипаттама – эксцентрлік аномалия: $E - e \sin E = M$. Кеплер теңдеуі – трансцендетті (тригонометриялық құраушысы бар), сондықтан эксцентрлік аномалияны M және e аргументтері бар элементарлы функция ретінде анықтауға мүмкіндік болмайды.

Үлкен және көптеген кіші планеталар, өздерінің табиғи серіктері және Жердің жасанды серіктері үшін орбиталар эксцентриситеті кіші болады: $e \ll 1$. Осы жағдай үшін Кеплер теңдеуінің сандық шешімі итерация әдісімен табылады. Сонда

$$E_{n+1} = e \sin E_n + M \quad (9)$$

E_0 - алғашқы жуықтау ретінде M - орташа аномалияның мәні алынады.

Сонда итерациялық процестін жинақтылық шарты орындалады

$$|e \sin E| \leq e < 1. \quad (10)$$

Итерация санын азайтуға болады, егер алғашқы жуықтау ретінде арнайы кестелерден Кеплер теңдеудің жуықтау шешімі алынса. Бірақ қолданбалы және теориялық есептерінде Кеплер теңдеудің аналитикалық шешімі қажет. Сол кезде шешімді e эксцентриситеттің дәрежесі бойынша қатарлары арқылы табады. Ал E - эксцентрлік аномалия M - орташа аномалияның периодтық функциясы болады. Осы жағдай E шамасын орташа аномалия бойынша Фурье қатарына жіктеуге болатынын көрсетеді.

Кеплер теңдеудің шешімін

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^k \quad (11)$$

дәрежелік қатар арқылы табу үшін, осы қатардың E_k коэффициенттерін анықтау қажет

$$E_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{dE(e)}{de} \right|_{e=0}. \quad (12)$$

Бірақ кез-келген дәрежедегі туындысын анықтау үшін Лагранж теоремасы қолданылады.

3. Кеплер теңдеуінің шешімі

Кеплер теңдеуінің шешімін эксцентрлік аномалияның комплекстік мәндері үшін және M - орташа аномалияның тұрақты нақты мәні кезіндегі e - эксцентриситеттің мәні үшін қарастырамыз

$$F(E, e) = E - e \sin E - M = 0. \quad (13)$$

Осы теңдеудің $E = E(e, M)$ шешімі Лагранж қатары ретінде табылады

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} (\sin^n M). \quad (14)$$

$e = 0$ кезінде эксцентрлік аномалия орташа аномалияның мәніне тең болады: $E = M$. Кеплер теңдеулерінде M - орташа аномалия – тұрақты параметр, оның мәндері кез келген болу мүмкін. Сондықтан $E = E(M, e)$.

Кеплер теңдеуін e және M бойынша дифференциалдаған кезінде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial e} (1 - e \cos E) - \sin E &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial M} (1 - e \cos E) - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

дербес туындылар үшін тәуелділіктері анықталады

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \sin E \frac{\partial E}{\partial M} \quad (16)$$

немесе

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (17)$$

Осыдан

$$E - e \sin E = M,$$

$$1 - e \cos E = 0,$$

сонда

$$e = \frac{1}{\cos E}. \quad (18)$$

Осыдан Лагранж қатарларының жинақтылық радиусы

$$e_0 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma_0\right)} = \frac{1}{sh\sigma} = 0.6627. \quad (19)$$

Осы теңдеу **Лаплас шегі** деп аталады. Егер $e < e_0$ - Лагранж қатарлары жинақталады; $e \gg e_0$ - қатарлардың таралғыштығы байқалады.

Сонда (11) формуламен берілген қатардың коэффициенттері

$$E_0 = M, E_1 = \sin M, E_2 = \frac{1}{2} \sin 2M. \quad (20)$$

және Кеплер теңдеуінің шешімі

$$E = M + e \sin M + e^2 \frac{1}{2} \sin 2M + \dots \quad (21)$$

4. Эллипстік қозғалыстың дәрежелік қатарлары

$e \ll 1$ болған жағдайда дәрежелік қатарларды жазуға болады. Сол үшін $\cos E$ және $\sin E$ қатарларын қолдану қажет

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^k, \quad \sin E = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^k. \quad (22)$$

осында

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (-\sin^{k+1} M). \quad (23)$$

(23) формула бойынша бірінші коэффициенттерін анықтаған кезінде

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M) + \dots \quad (24)$$

Кеплер теңдеуінен

$$\sin E = \frac{E - M}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{k-1} - \frac{M}{e}. \quad (25)$$

(22) және (25) салыстырған кезінде

$$S_k = E_{k+1}. \quad (26)$$

Егер кейінгі қатарлардың коэффициенттерін E_k - негізгі қатардың коэффициенттері арқылы және C_k қатарларын эксцентрлік аномалиямен оның косинустары арқылы жазылса, сонда орбита теңдеулері

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E. \quad (27)$$

Негізгі қатарлардың коэффициенттерінің өлшемі болмайды, сондықтан барлық шамаларды өлшемі жоқ түріне келтіріледі. (27) формула қатар ретінде жазылады

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k e^k, \quad (28)$$

осында

$$R_k = C_{k-1} \quad (k \neq 0), \quad R_0 = 1. \quad (29)$$

Өлшемсіз орбиталдық координаттардың теңдеулері

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sin E \quad (30)$$

және олардың дәрежелік қатарлары

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k e^k, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k e^k. \quad (31)$$

Осында

$$\Xi_k = C_k \quad k \neq 1, \quad \Xi_1 = C_1 - 1$$

және

$$H_k = \sum_{s=0}^k \alpha_s S_{k-s} = \sum_{s=0}^k \alpha_s E_{k-s+1} \left(\alpha_0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_{2j} = (-1)^j \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \alpha_{2j+1} = 0 \right).$$

Бастапқы координат жүйесінің координаттарының қатарлары

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k e^k, \quad \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k e^k, \quad \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k e^k \quad (32)$$

және орбиталдық координаттарымен байланысы

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \Xi_k + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot H_k. \quad (33)$$

Өлшемсіз жылдамдықтың қатарын анықтау үшін энергия интегралы қолданылады

$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = 2 \cdot \frac{a}{r} - 1. \quad (34)$$

M бойынша Кеплер теңдеуі дифференциалдағанда

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{a}{r} \quad (35)$$

кері арақашықтық қатарының коэффициенттері анықталады. Кері арақашықтық қатары

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_k e^k, \quad \tilde{R}_k = \frac{dE_k}{dM}. \quad (36)$$

(34) теңдеуді қатар арқылы жазғанда

$$\left(\frac{V}{na} \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(2)} e^k, \quad (37)$$

қатардың коэффициенттері

$$V_k^{(2)} = 2\tilde{R}_k \quad (k \neq 0), \quad V_0^{(2)} = 1. \quad (38)$$

Сонда

$$\frac{V_n}{na} = \frac{r \dot{V}}{na} = \frac{\sqrt{\mu p}}{nar} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1 - e^2}, \quad (39)$$

және

$$\frac{\dot{V}}{n} = \frac{V_n}{nr} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na}. \quad (40)$$

теңдеулерді қолданып, қатарларды өзара бір-біріне көбейтіп, уақыт бойынша көбейтіндінің интегралын анықтау арқылы шын аномалияның қатары табылады

$$v = \sum_k^{\infty} v_k e^k. \quad (41)$$

Бұл теңдеу – *центр теңдеуі* деп аталады. Осы қатардың бірінші құраушылары

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \quad (42)$$

5. Эллипстік қозғалыстың тригонометриялық қатарлары

$0 < e < 1$ болған жағдайда тригонометриялық қатарларды жазуға болады, сонда M - орташа аномалия бойынша Фурье қатарлары алынады. Эллипстік қозғалыс кезінде эксцентрілік аномалия және оған тәуелді сипаттамалар, орташа аномалияға тәуелді периодтық функциялар болады.

2π периоды бар жұп периодты функциялар үшін Фурье қатары:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (43)$$

осында Фурье коэффициенттері

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (44)$$

Тақ функциялар үшін

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (45)$$

осында Фурье коэффициенттері

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (46)$$

Эксцентрілік аномалия және оның косинусы үшін негізгі қатарларының Фурье коэффициенттерін анықтауға болады. $E - M$ шамасы үшін

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin kM dM. \quad (47)$$

(47) теңдеуін E айнымалы шамасы бойынша бөліп интегралдау арқылы Фурье қатарының коэффициенттері анықталады

$$b_k = \frac{2}{k\pi} \left[-(E - M) \cos kM \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos kM (dE - dM) \right] = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kE - ke \sin E) dM, \quad (48)$$

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (49)$$

Бессель функциясын $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (k\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$ қолданған кезінде

$$b_k = \frac{2}{k\pi} J_k(ke), \quad (50)$$

$$a_k = \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \quad (51)$$

Фурье қатары эксцентрілік аномалия және оның косинусы үшін төменгі теңдеулерімен анықталады

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM, \quad (52)$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM. \quad (53)$$

Енді эллипстік қозғалыстың басқа сипаттамалары үшін Фурье қатарлары

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\xi}{a} &= -\frac{3}{2}e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM. \end{aligned} \quad (54)$$

Бессель функциясы абсолютті жинақтықлық дәрежелік қатарларына жіктеледі

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{k!(k+j)!} \quad (55)$$

Егер $(x = ke)$ (55) теңдеуін (52), (53) және (54) теңдеулеріне енгізгенде, эксцентриситет дәрежесі бойынша тригонометриялық қатарларын алуға болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Ұйытқысыз қозғалыс дегеніміз не және оның негізгі ерекшелігі неде?
2. Эфемерида дегеніміз не және оны анықтауда қандай бастапқы деректер қолданылады?
3. Эллипстік қозғалыстың қатарлары не үшін қолданылады?
4. Кеплер теңдеуі қандай шамалар арасындағы байланысты сипаттайды?
5. Кеплер теңдеуінің аналитикалық шешімін табу неге қиын?
6. Кеплер теңдеуін шешудің сандық және жуық тәсілдері қандай?
7. Эллипстік қозғалыстың дәрежелік қатарларының физикалық мәні қандай?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.
6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.